Das folgende „Beispiel" ist von zentraler Bedeutung:

Satz 22.3.1: Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$,

$$\gamma(t) := r e^{it} \quad (r > 0 \text{ fixiert}).$$

Dann gilt:

$$\boxed{\int_\gamma z^k \, dz = \begin{cases} 0, & k \in \mathbb{Z},\ k \neq -1 \\ 2\pi i, & k = -1. \end{cases}}$$

Beweis:

$$\int_\gamma z^k \, dz = \int_0^{2\pi} r^k e^{ikt} \; r i e^{it} \, dt$$

$$= i r^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)t} \, dt$$

Für $k = -1$ ergibt sich

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = i \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi i .$$

Sei $k \neq -1$. Dann beachte

$$\frac{d}{dt} e^{i(k+1)t} = i(k+1) \, e^{i(k+1)t}$$

$$\Longrightarrow \quad e^{i(k+1)t} = \frac{1}{i(k+1)} \frac{d}{dt} e^{i(k+1)t}$$

Einsetzen ergibt:

$$\int_\gamma z^k \, dz = i r^{k+1} \frac{1}{i(k+1)} \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} e^{i(k+1)t} \, dt$$

$$= \frac{r^{k+1}}{k+1} \left(e^{i(k+1)t} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0 .$$

$\square$

<u>Interpretation der Formel:</u>

- für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist $z \mapsto z^k$ <u>auf $\mathbb{C}$ holomorph</u> und hat global eine Stammfunktion $z \mapsto \frac{1}{k+1} z^{k+1}$

$\Longrightarrow$ das Umlaufintegral verschwindet

- für $k = -1$ ist $z \mapsto z^k$ "<u>singulär in 0</u>" (dort nicht definiert, aber sonst holomorph)

$\Longrightarrow$ das Umlaufintegral ist $\neq 0$

- für $k = -2, -3, \ldots\ldots$ ist $z \mapsto z^k$ zwar auch singulär in 0, <u>es gibt aber eine komplexe</u>

sogar noch viel schlimmer als $1/z$

Stammfunktion auf $\mathbb{C} - \{0\}$

$$\Longrightarrow \int_\gamma z^k \, dz = 0$$

Dagegen hat $z \mapsto 1/z$ keine Stammfkt. auf $\mathbb{C} - \{0\}$.

Nachfolgend sollen die Zusammenhänge zwischen

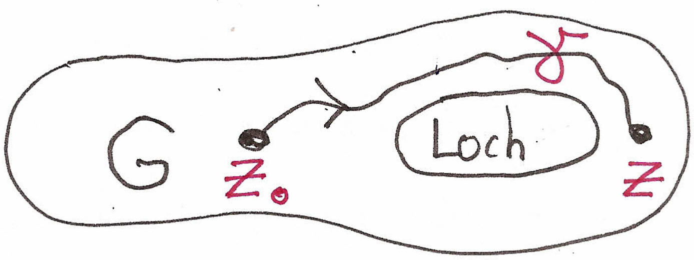
- Wegunabhängigkeit des Integrals
- Existenz von Stammfunktionen

genauer untersucht werden

Definition 22.3.2 Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. $F : U \to \mathbb{C}$ heißt eine Stammfkt zu f auf U, falls F auf U holomorph ist mit $\boxed{F' = f}$.

Bemerkung:

1.) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein $\boxed{\text{Gebiet}}$, also $G \neq \emptyset$ offen und je 2 Punkte aus G lassen sich durch eine Kurve in G verbinden.



Sind dann Stammfunktionen

$$F, \tilde{F} : G \to \mathbb{C}$$

zu $f : G \to \mathbb{C}$, so gibt es eine komplexe Zahl c mit

$$\boxed{\tilde{F} = F + c \text{ auf } G}$$

Auf Gebieten sind also Stammfktn – wenn existent – eindeutig bestimmt bis auf additive Konstanten.

Beweis: Fixiere $z_0 \in G$. Für $z \in G$ gilt mit $\gamma : [0,1] \to G$ wie im Bild

(Hauptsatz)

$$\tilde{F}(z) - F(z) - (\tilde{F}(z_0) - F(z_0)) \overset{\downarrow}{=}$$

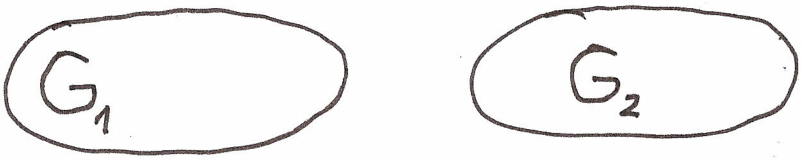
$$\int_0^1 \frac{d}{dt}\left[(\tilde{F} - F)(\gamma(t))\right] dt \overset{\text{s.u.}}{=} !$$

$$\int_0^1 \underbrace{\frac{d}{dz}(\tilde{F} - F)(\gamma(t))}_{\equiv 0} \gamma'(t)\, dt \implies$$

$$\tilde{F}(z) = F(z) + \tilde{F}(z_0) - F(z_0)$$

$$\forall z \in G \qquad \square$$

2.) G <u>kein</u> Gebiet $\Longrightarrow$
2 Stammfunktionen $F, \widetilde{F}$ zu $f: G \to \mathbb{C}$
müssen <u>nicht</u> vom Typ $\widetilde{F} = F + c$ sein.



offen, disjunkt

$$G := G_1 \cup G_2 \,, \quad f: G \to \mathbb{C}$$

$$\boxed{f :\equiv 0}$$

Setze nun

$$F: G \to \mathbb{C}, \quad F := \begin{cases} 0 & \text{auf } G_1 \\ 1 & \text{auf } G_2 \end{cases} \,,$$

$$\widetilde{F}: G \to \mathbb{C}, \quad \widetilde{F} := \begin{cases} 1 & \text{auf } G_1 \\ 0 & \text{auf } G_2 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $F, \tilde{F}$ holomorph auf G mit

$$\frac{d}{dz} F = \frac{d}{dz} \tilde{F} = 0 = f,$$

$\boxed{\text{aber}}$ $\tilde{F} \neq F + c$ für $c \in \mathbb{C}$!

$\square$

Bei obigen Rechnungen haben wir benutzt

$\boxed{\text{Proposition 22.3.1}}$: Sei $F : U \to \mathbb{C}$

holomorph auf der offenen Menge U und

$\gamma : [a,b] \to U$ ein glatter Weg in U.

Dann gilt die Ableitungsregel:

$$\boxed{\frac{d}{dt} F(\gamma(t)) = F'(\gamma(t))\, \dot{\gamma}(t)} \quad (*)$$

Hierbei: $\frac{d}{dt} \ldots$, $\dot{\gamma}$ = Ableitung nach der reellen Variablen t

$$F'(z) = \frac{dF}{dz}(z) \quad \underline{\text{komplexe}} \text{ Ableitung}$$

Bem: Die Formel sieht aus wie die „Kettenregel" (ist sie letztlich auch), aber man kombiniert rechts verschiedene Ableitungen ($\frac{d}{dz}$ und $\frac{d}{dt}$). Deshalb sollte man die Gleichung prüfen!

Beweis der Formel: schreibe

$$F(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

Es gilt:

$$F' \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\left[F_x - i F_y\right] =$$

„Formel (2)" für die komplexe Ableitung

$$\frac{1}{2}\left[(u_x + i v_x) - i(u_y + i v_y)\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[u_x + v_y + i(v_x - u_y)\right]$$

Schreibe $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$

Dann ist

r. S. von $\circledast$ $=$

$$\frac{1}{2}\left[\ldots\ldots\right](\gamma(t))\ \left(\dot{\gamma}_1(t) + i\dot{\gamma}_2(t)\right)$$

Sortieren nach Re und Im

$$= \frac{1}{2}(u_x + v_y)(\gamma(t))\ \dot{\gamma}_1(t)$$

$$- \frac{1}{2}(v_x - u_y)(\gamma(t))\ \dot{\gamma}_2(t)$$

$$+ \frac{1}{2} i \left\{ (u_x + v_y)(\gamma(t))\ \dot{\gamma}_2(t) + \right.$$

$$(v_x - u_y)(\gamma(t))\,\dot\gamma_1(t)\Big\}$$

Nun benutze $\underbrace{(u_x = v_y\,,\; u_y = -v_x}_{\text{CR Dglen}}$

$$\Longrightarrow \text{r. S. von } (*) =$$

$$u_x(\gamma(t))\,\dot\gamma_1(t) + u_y(\gamma(t))\,\dot\gamma_2(t)$$

$$+\, i\Big(v_y(\gamma(t))\,\dot\gamma_2(t) + v_x(\gamma(t))\,\dot\gamma_1(t)\Big)$$

Nach der <u>reellen Kettenregel</u> (Satz 17.2.1)

gilt

$$\text{l. S. von } (*) = \frac{d}{dt}\Big(u(\gamma_1(t),\gamma_2(t))$$

$$+\, i\, v(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\Big)$$

$$= u_x(\gamma(t))\,\dot\gamma_1(t) + u_y(\gamma(t))\,\dot\gamma_2(t)$$

$$+ i\left\{ v_x(\gamma(t))\,\dot\gamma_1(t) + v_y(\gamma(t))\,\dot\gamma_2(t) \right\},$$

Vergleich ergibt die Beh. $(*)$. $\square$

Eine direkte Folgerung ist nun

$\boxed{\text{Satz 22.3.2}}$: Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ offen. Die stetige Funktion $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ besitze eine komplexe Stammfunktion $F : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$. Dann gilt:

i) $$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0)}$$

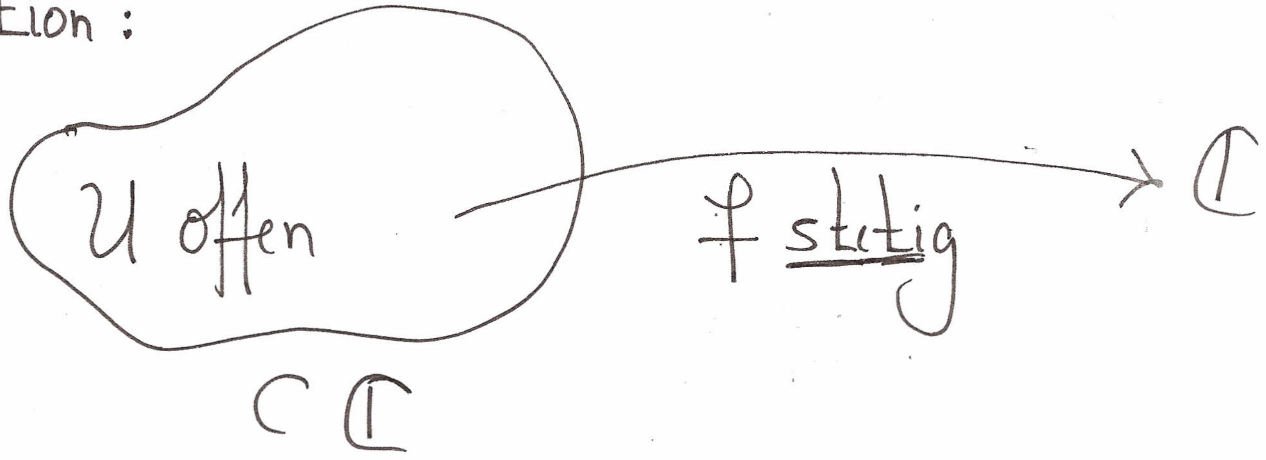
für jeden Weg γ in $\mathcal{U}$, der von $z_0 \in \mathcal{U}$ nach $z_1 \in \mathcal{U}$ verläuft.

ii) Speziell ist $\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \text{ für geschlossene } \gamma.}$

ii) Speziell ist $\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \text{ für geschlossene } \gamma.}$

„Stammfunktionen u. Wegintegrale"

Situation:



gezeigt (Satz 22.3.2):

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \quad \forall \text{ geschlossene Wege } \gamma \text{ in } U$$

$$\Uparrow$$

$\exists$ Stammfunktion F zu f auf U